DS n°4 : ED, nombres réels, suites, etc. – Corrigé

Noté sur 120 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 5 pour faire une note sur 20.

Exercice 1 : Équations différentielles (20 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - \dfrac{e^t}{e^t+1}y = \dfrac{e^t}{e^t+1}$ **(5 pts)**

L'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$.

On remarque qu'une primitive de $t \mapsto -\dfrac{e^t}{e^t+1}$ est $t \mapsto -\ln(e^t+1)$, et donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(t) = Ce^{\ln(e^t+1)} = C(e^t+1) \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière. On remarque que $y_p(t) = -1$ convient. Finalement, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{y(t) = C(e^t+1) - 1 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

2) $\begin{cases} y'' + iy' + 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = i \end{cases}$ **(5 pts)**

L'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique est $r^2 + ir + 2 = 0$. On constate que i est racine évidente, et donc $r^2+ir+2 = (r-i)(r+2i)$, de sorte que $-2i$ est l'autre racine. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = Ae^{ix} + Be^{-2ix} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

Le second membre de l'équation différentielle étant nul, on peut prendre $y_p(t) = 0$ comme solution particulière. Ainsi, y est solution de l'équation différentielle si et seulement si y est de la forme de y_H ci-dessus.

Enfin, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\begin{cases} y(0) = i \\ y'(0) = i \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = i \\ iA - 2iB = i \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = i \\ A - 2B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A = 2i + 1 \\ 3B = i - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{2i+1}{3} \\ B = \dfrac{i-1}{3} \end{cases}$$

Finalement, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{y(x) = \frac{2i+1}{3}e^{ix} + \frac{i-1}{3}e^{-2ix}}$$

3) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{3}e^{-2x} + 3\left(x^2+1\right)$ **(10 pts)**

L'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$, i.e. $(r+2)^2 = 0$. Comme -2 est racine double, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Déterminons une solution particulière. Cherchons y_1 et y_2 telles que

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x}$$
$$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = x^2 + 1$$

- Pour y_1, on pose $y_1(x) = Cx^2e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_1'(x) = C(2x - 2x^2)e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= C\left(2 - 4x - 2(2x - 2x^2)\right)e^{-2x} \\ &= C\left(4x^2 - 8x + 2\right)e^{-2x} \end{aligned}$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$C\left(4x^2 - 8x + 2\right)e^{-2x} + 4C(2x - 2x^2)e^{-2x} + 4Cx^2e^{-2x} = e^{-2x}$$

i.e.

$$2C = 1 \iff C = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$ convient.

- Pour y_2, on pose $y_2(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_2'(x) = 2ax + b$$

$$y_2''(x) = 2a$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$2a + 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

i.e.

$$4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b + 4c = x^2 + 1$$

et donc en identifiant, on en déduit que

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 8a + 4b = 0 \\ 2a + 4b + 4c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/4 \\ 2 + 4b = 0 \\ 1/2 + 4b + 4c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/2 \\ -3/2 + 4c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/2 \\ 4c = 5/2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/2 \\ c = 5/8 \end{cases}$$

Ainsi, $y_2(x) = \dfrac{1}{8}\left(2x^2 - 4x + 5\right)$ convient.

D'où, par le principe de superposition, une solution particulière de l'équation de départ est donnée par

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{3}y_1(x) + 3y_2(x) \\ &= \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{3}{8}\left(2x^2 - 4x + 5\right) \end{aligned}$$

Finalement, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{6}x^2 e^{-2x} + \frac{3}{8}\left(2x^2 - 4x + 5\right) + (A + Bx)e^{-2x}} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 : Une équation différentielle d'ordre 3 (20 pts)

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $y''' = y$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Déterminer une solution particulière non nulle de (E). **(1 pt)**

On remarque que $\boxed{x \mapsto e^x}$ est une solution non nulle de (E).

2) Soit g une solution de (E). On considère la fonction $h = g + g' + g''$.

a) Montrer que h est solution d'une équation différentielle (E') d'ordre 1 à déterminer. **(4 pts)**

On remarque que

$$h' = g' + g'' + g''' = g' + g'' + g$$

car g est solution de (E). Ainsi, l'équation (E') est $\boxed{h' = h}$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g''(x) + g'(x) + g(x) = \alpha e^x \quad (E_\alpha)$$

(3 pts)

Comme $h' = h$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = \alpha e^x$. D'où, comme $h = g + g' + g''$, on a le résultat voulu.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (E_α). **(5 pts)**

L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. L'équation admet donc deux racines complexes, l'une étant

$$r = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$g_H(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Enfin, une solution particulière évidente est donnée par

$$g_p(x) = \frac{\alpha}{3}e^x$$

Finalement, $g \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{g(x) = \frac{\alpha}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3) En déduire l'ensemble des solutions de (E). **(7 pts)**

On procède par analyse-synthèse.

- Analyse : soit g une solution de (E). Par la question 2), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que g est solution de (E_α). Ainsi, nécessairement il existe $\alpha, A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$g(x) = \frac{\alpha}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$
- Synthèse : vérifions si les fonctions g ci-dessus (une pour chaque valeur de α, A, B) sont effectivement solutions de (E). Par construction, cette fonction g vérifie
$$g'' + g' + g = \alpha e^x$$
et donc en dérivant, on obtient
$$g''' + g'' + g' = \alpha e^x = g'' + g' + g$$
si bien que $g''' = g$. Ainsi, g est bien solution de (E).

Finalement, les solutions de (E) sont toutes les fonctions trouvées à la question précédente.

Exercice 3 : Un théorème de point fixe (25 pts)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose
$$T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq x\}$$

1) Si $f = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, i.e. f est la fonction indicatrice de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, que vaut T ? **(2,5 pts)**

Soit $x \in [0,1]$.

- Si $x < \frac{1}{2}$, alors $f(x) = 0 \leq x$, donc $x \in T$.
- Si $\frac{1}{2} \leq x < 1$, alors $f(x) = 1 > x$, donc $x \notin T$.
- Si $x = 1$, alors $f(x) = 1 = x$, donc $1 \in T$.

Finalement
$$T = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \{1\}$$

2) Montrer que T possède une borne inférieure qu'on note m. **(5 pts)**

Par construction, T est minorée par 0 et de plus, comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a $f(1) \leq 1$ donc $1 \in T$. Ainsi T est non vide.

Par la propriété de la borne inférieure, T admet un infimum.

3) Montrer que $f(m)$ est un minorant de T. **(6 pts)**

Soit $x \in T$. Il suffit de montrer que $f(m) \leq x$. Comme $m = \inf T$, on a nécessairement $m \leq x$. En appliquant f qui est croissante à cette inégalité, on en déduit que $f(m) \leq f(x)$. Or, $x \in T$ donc $f(x) \leq x$. Ainsi, $f(m) \leq x$. D'où le résultat.

4) Montrer que $f(T) \subset T$. **(6 pts)**

Soit $y \in f(T)$. Montrons que $y \in T$. Par définition de $f(T)$, il existe $x \in T$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $y \in [0,1]$. Il suffit donc de vérifier que $f(y) \leq y$ pour conclure que $y \in T$.

Or, comme $x \in T$, on a $f(x) \leq x$. En appliquant la fonction f qui est croissante, on obtient $f(f(x)) \leq f(x)$, donc $f(y) \leq y$. Finalement $y \in T$. Ainsi, $f(T) \subset T$ par arbitraire sur y.

5) En déduire que $f(m) = m$. **(5,5 pts)**

Par les questions 2 et 3, comme $f(m)$ est un minorant de T et puisque $m = \inf T$ est le plus grand des minorants de T, on en déduit que $f(m) \leq m$. Or, ceci entraine que $m \in T$. En particulier m est un minorant et un élément de T, donc $m = \min T$.

Ensuite, par la question 4, le fait que $m \in T$ entraine que $f(m) \in f(T) \subset T$. Ainsi $f(m)$ est un minorant et un élément de T. On en déduit que $f(m) = \min T$.

Par unicité du minimum, on a donc $f(m) = m$.

Problème : étude d'une suite récurrente **(55 pts)**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

On admettra que cette suite est bien définie.

1) On cherche à déterminer la limite de (u_n). Il est recommandé de suivre scrupuleusement les sous-questions suivantes :

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. **(2,5 pts)**

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, c'est évident car $u_n = u_0 > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$. On a alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} > 0$$

d'où l'hérédité est vérifiée.

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone. **(2,5 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$ par la question a), on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} < 1 \qquad \text{car } u_n^2 > 0$$

donc (u_n) est (strictement) décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite. **(6 pts)**

Par les questions a) et b), la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc (par le théorème de la limite monotone), elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

et en passant à la limite, on a donc (par quotient)

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$$

c'est-à-dire $\ell + \ell^3 = \ell$, ou encore $\ell^3 = 0$. On en déduit que $\ell = \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_n uniquement. **(1 pt)**

On a

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{(1+u_n^2)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} \\ &= \frac{1+2u_n^2+u_n^4-1}{u_n^2} \\ &= \boxed{2+u_n^2} \end{aligned}$$

b) Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers 2. **(3 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = (2+u_{n+1}^2) - (2+u_n^2) = u_{n+1}^2 - u_n^2$$

Par les questions précédentes, on a $0 < u_{n+1} \leq u_n$ donc $u_{n+1}^2 \leq u_n^2$ (par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$. De plus, d'après la question 1.c), on a $u_n \to 0$, donc $u_n^2 \to 0$ par composition, et ainsi $\boxed{v_n \to 2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n(n+1)}\left((v_n - v_0) + (v_n - v_1) + \cdots + (v_n - v_{n-1})\right)$$

En déduire que la suite (w_n) est décroissante. **(7 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \frac{1}{n+1}v_n + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} v_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \frac{1}{n+1}v_n + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \frac{1}{n+1}v_n - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(nv_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}(v_n - v_k)} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 2)b), (v_n) est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $v_n - v_k \leq 0$. En sommant ces termes, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_n - v_k) \leq 0$$

et finalement $w_{n+1} - w_n \leq 0$. D'où $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante.}}$

b) Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel $l \geq 2$. **(6 pts)**

Comme (v_n) est décroissante et tend vers 2, on a en particulier que (v_n) est minorée par 2. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (w_n) est décroissante par la question précédente et minorée par 2. Donc elle converge vers un réel $l \geq 2$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2w_{2n} - w_n \leq v_n$. En déduire que $l \leq 2$, puis que $l = 2$. **(7 pts)**

$$\begin{aligned} 2w_{2n} - w_n &= \frac{2}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} v_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{2n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} v_k \end{aligned}$$

Or, (v_n) est décroissante, donc pour tout $k \in [\![n, 2n-1]\!]$, on a $v_k \leq v_n$. Ainsi,

$$2w_{2n} - w_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} v_n = \frac{v_n}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} 1$$

et donc $\boxed{2w_{2n} - w_n \leq v_n}$. Or, comme $w_n \to l$, on a aussi $w_{2n} \to l$. Donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$2l - l \leq 2$$

càd $l \leq 2$. Par la question précédente, on a également $l \geq 2$, donc $\boxed{l = 2}$.

4)

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer w_n en fonction de u_n, u_0 et n. **(5 pts)**

On a

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \boxed{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)}$$

b) Montrer que (nu_n^2) converge vers $\frac{1}{2}$. **(5 pts)**

Par la question précédente, on a

$$\frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{nu_0^2} + w_n$$

et donc, par passage à la limite $\frac{1}{nu_n^2} \to 0 + 2$ par la question 3)c). En passant à l'inverse, on a donc $\boxed{nu_n^2 \to \frac{1}{2}}$.

c) Déterminer $\alpha > 0$ tel que la suite de terme général $n^\alpha(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite non nulle. Déterminer cette limite. **(10 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

et donc $u_{n+1}(1 + u_n^2) = u_n$, ou encore $u_{n+1} - u_n = -u_{n+1}u_n^2$. Or, d'une part, par la question b), on a

$$nu_n^2 \to \frac{1}{2}$$

et par ailleurs, par composition de limites,

$$\sqrt{nu_n^2} = \sqrt{n}u_n \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et ainsi, $\sqrt{n+1}u_{n+1} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$. En particulier, avec $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$, on a

$$\begin{aligned} n^\alpha(u_{n+1} - u_n) &= -n^{3/2}u_{n+1}u_n^2 \\ &= -\sqrt{n}u_{n+1} \times nu_n^2 \\ &= -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \times \sqrt{n+1}\, u_{n+1} \times nu_n^2 \\ &\to -1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

qui est bien une limite non nulle.